

铰链刚体系统

阮良旺

北京大学可视计算与学习实验室

更新：2021年8月23日

1 刚体模拟回顾

在之前的教程中我们已经导出了一个刚体的状态更新方程：

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_c \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_c \\ [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{R} \\ \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

我们直接需要求解的未知量是质心线速度 \mathbf{v}_c 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ ，他们与动量 \mathbf{p} 和角动量 \mathbf{L} 的关系是：

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{p} &= m \mathbf{v}_c. \end{aligned} \quad (2)$$

于是我们就可以得到单个刚体的动力学方程：

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{I} & \\ & \mathbf{I}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_c \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

这个方程在后面被简记为：

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (4)$$

2 铰链刚体简介

铰链刚体实际上就是刚体加上关节，一些常见的关节如图1所示：

我们有两种思路理解铰链刚体：一是将关节视为施加在刚体之间的位置约束，加的关节越多，整个系统的自由度被减去得就越多；另一种思路需要假设每个刚体对应一个关节，那么整个系统就可以使用关节的自由度（比如关节的旋转角）来直接描述。这两种视角对应两种求解铰链刚体动力学的方法，第一种称为最大坐标（maximum coordinate）方法，第二种称为约化坐标（reduced coordinate）方法。下面我们来依次了解这两种方法。

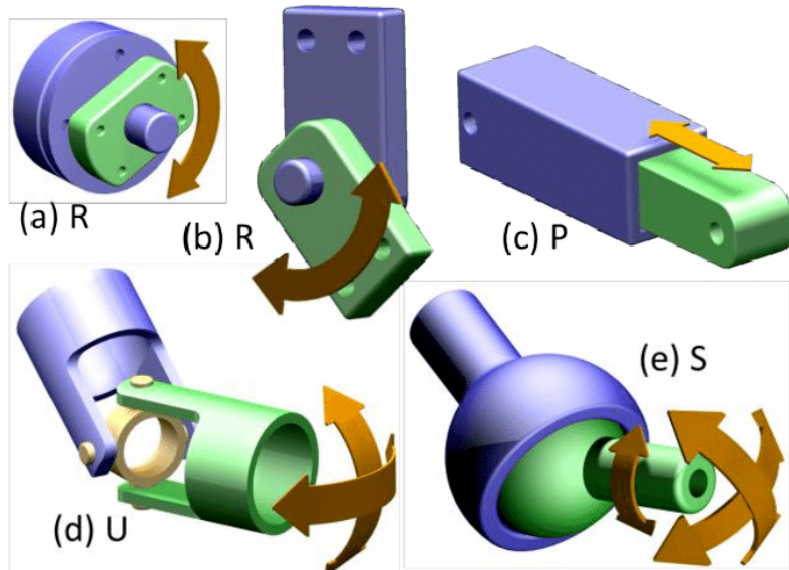


图 1: 常见关节

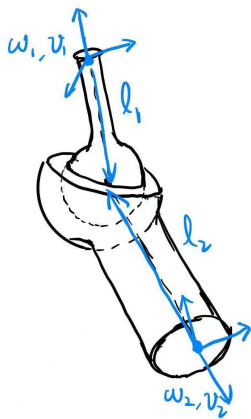


图 2: 球关节

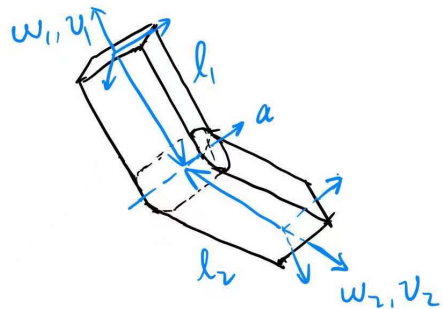


图 3: 旋转关节

3 最大坐标方法

我们从两个具体的例子出发考虑如何将关节表示为约束。首先考虑刚体 1 和刚体 2 之间通过一个球关节连接在一起，这意味着刚体 1 和刚体 2 上对应的关节球心应该始终重合在一起，如图 2 所示。使用数学公式表达可以写为：

$$\mathbf{x}_{c1} + \mathbf{R}_1 \mathbf{l}_1 = \mathbf{x}_{c2} + \mathbf{R}_2 \mathbf{l}_2. \quad (5)$$

但是在 4 中我们求解的是速度，于是我们对上式两边同时对时间求导，得到速度的约束关系：

$$\mathbf{v}_{c1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{R}_1 \mathbf{l}_1) = \mathbf{v}_{c2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{R}_2 \mathbf{l}_2) \quad (6)$$

我们定义由刚体 1 和 2 的速度组成的向量为 $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_{c1}^T, \boldsymbol{\omega}_1^T, \mathbf{v}_{c2}^T, \boldsymbol{\omega}_2^T)^T$ ，于是上面的约束可以写为：

$$\mathbf{J} \mathbf{v} = 0, \text{ where } \mathbf{J} = (\mathbf{I}, -[\mathbf{R}_1 \mathbf{l}_1], -\mathbf{I}, [\mathbf{R}_2 \mathbf{l}_2]). \quad (7)$$

这个式子中每一行记作一个约束，于是球关节一共施加了 3 个自由度的约束。下面我们再看旋转关节（Hinge joint）的例子，如图3所示。旋转关节同球关节一样会限制刚体的位置，除此之外还会限制两个刚体的相对角度。利用之前刚体运动学的知识，我们知道刚体 2 相对于刚体 1 的角速度就是 $\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1$ ，这个角速度只能沿着旋转轴的方向，于是有 $[\mathbf{a}](\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) = 0$ 。这样写存在一个问题， $[\mathbf{a}]$ 是表示叉乘的反对称矩阵，这并不是一个满秩的矩阵（ \mathbf{a} 为其特征值为 0 的非零向量），所以尽管这个式子有 3 行，并不代表我们对角速度施加了 3 个自由度的约束。为了解决这个问题，我们可以计算与 \mathbf{a} 垂直的两个向量 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 ，将约束写成

$$\mathbf{a}_{1,2}^T(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) = 0, \text{ where } \mathbf{a}_{1,2} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (8)$$

将这两行加到之前的位置约束上，我们又可以得到 $\mathbf{J}\mathbf{v} = 0$ 的形式，其中 \mathbf{J} 有 5 行，表示旋转关节额外施加了 5 个自由度的约束。

3.1 最大坐标动力学

有了这两个例子之后，我们可以将带铰链约束的刚体模拟离散后的公式总结为如下的形式：

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{\text{joint}}, \mathbf{J}\mathbf{v}^{n+1} = 0, \quad (9)$$

其中 $\mathbf{f}_{\text{joint}}$ 表示关节上刚体之间的相互作用力， \mathbf{J} 表示所有的关约束。直接求解这个问题的困难在于关节上的作用力难以计算，好在我们可以绕过这个问题。关节上的作用力是被称为约束力，是我们对位置和速度施加约束之后的副作用，并不是额外施加的力，于是这个力并不会产生额外的能量。如果我们将公式9改写为能量最小化的形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+1} &= \operatorname{argmin} \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^n\|^2 - \mathbf{f}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{J}\mathbf{v}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

这个式子在第一行不会出现关节作用力的能量，于是公式9就被转化成了公式10中的带约束的优化问题。我们可以使用拉格朗日乘子法求解这个问题：

$$(\mathbf{v}^{n+1}, \boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{argmin}_v \operatorname{argmax}_\lambda \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^n\|^2 - \mathbf{f}^T \mathbf{v} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J}\mathbf{v}. \quad (11)$$

利用 KKT 条件我们得到带关约束的刚体动力学方程：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{J}^T \\ -\mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{v}^n + \mathbf{f}\Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

注意到这个方程中第一行除去 $\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$ 这一项剩下的部分就是无约束的刚体动力学方程，于是自然就有 $\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$ 就是我们之前绕过去的约束力。更进一步，约束力的大小与 $\boldsymbol{\lambda}$ 成正比，也就意味着拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 实际上存在物理意义，其表示的就是约束力的强度。具体到每个时间步中，我们先使用刚体的当前位置计算关约束矩阵 \mathbf{J} 的具体形式，然后组装方程12并求解，就可以得到刚体下一时间的速度。如果是隐式欧拉或其他隐式时间步算法，只需要在方程第一行的左右两边加上对应项就可以。

3.2 软约束

在之前的讨论中我们假设约束都是“硬约束”，也就是说每时每刻都必须满足位置的约束条件。但是在一些情况下我们可以假设我们的约束是“软约束”，也就是说约束并不一定需要时时刻刻被满足，但是一旦约束被违反就会存在一个反方向的驱动力迫使系统重新满足约束。比如在球关节中，我们就可以认为两个刚体之间并不是严格地在球心处重合，而是二者之间连接了一根弹簧，带有劲度系数 k 。一般地，我们可以将软约束写为：

$$\boldsymbol{\lambda} = -k\mathbf{J}\mathbf{v}. \quad (13)$$

将这个方程代替方程12的第二行，我们就可以得到带软约束的刚体模拟方程：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{J}^T \\ -\mathbf{J} & -\frac{1}{k}\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{v}^n + \mathbf{f}\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

如果 $k = \infty$ ，方程左边右下角的部分是 0 ，对应的就是硬约束的方程。 $k < \infty$ 时，就可以通过调节 k 的大小调节关节的软硬。利用这个方法，我们可以为关节添加硬度。比如在旋转关节中，我们可以额外增加一个软约束 $\mathbf{a}^T(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) = 0$ ，这样旋转关节就不光会自由旋转，还可以像一个弹簧一样振荡。

4 约化坐标方法

本节会介绍使用约化坐标方法求解铰链刚体系统，基本内容为 Redmax's Note[1] 的提炼版，更详细的推导和代码请参考原文。介绍约化坐标方法之前，我们首先要对刚体系统增加一些限制。我们假设刚体与关节之间一一对应，并且整个刚体系统组成一个树形结构。这意味着根节点上的刚体对应一个自由关节，其他刚体对应的关节连接父节点。在这个假设下，我们可以设想整个刚体系统的自由度全部用各个关节上的自由度来表示，我们还是举球关节和转动关节这两个例子来说明这一问题。我们首先考虑转动关节，如果我们用旋转角 θ 表示关节的自由度，则刚体 2 的位置就可以用刚体 1 的位置加上关节自由度来表示：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_1 \cdot \text{AngleAxis}(\theta, \mathbf{a}) \\ \mathbf{x}_{c2} &= \mathbf{x}_{c1} + \mathbf{R}_1\mathbf{l}_1 - \mathbf{R}_2\mathbf{l}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

而对于球关节，我们需要选择合适的参数来表示关节旋转，常见的选择包括欧拉角、指数方法等，不管选择哪一种，最终我们都可以用一个 3 个自由度的向量 \mathbf{q} 来表示旋转的自由度，这里详细细节可以参考 Redmax[1] 的 Note。表示了旋转之后，我们类似地表示刚体 2 的位置：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_1 \cdot \text{Rotation}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{x}_{c2} &= \mathbf{x}_{c1} + \mathbf{R}_1\mathbf{l}_1 - \mathbf{R}_2\mathbf{l}_2. \end{aligned} \quad (16)$$

值得注意的是，关节的自由度与被关节约束起来的自由度加起来正好等于一个刚体的自由度 6，这对于所有关节都成立。

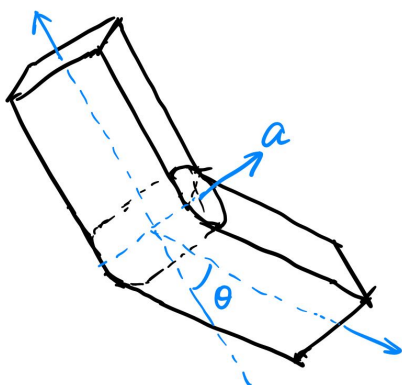


图 4: 旋转关节

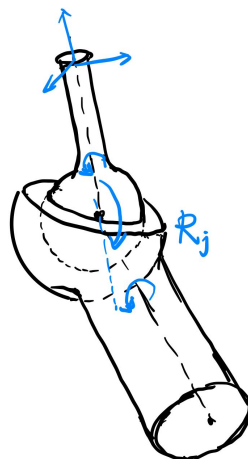


图 5: 球关节

通过这两个例子我们可以看到子节点上的刚体位置可以用父节点刚体的位置加上关节自由度来描述，那么从根节点的自由关节出发，我们就可以描述出整个刚体的位置。但是我们在每个时间步求解的是刚体的速度，所以我们还需要为刚体的速度找到关节的描述方法，为此我们下面从递归坐标变换开始推导。

4.1 递归坐标变换

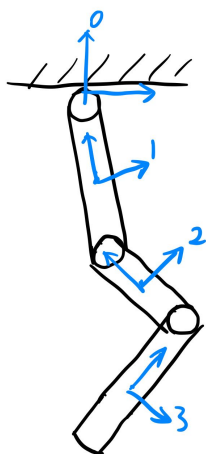


图 6: 关节速度

如图6所示，我们定义世界坐标系为坐标系 0，第 i 个刚体对应的刚体坐标系为坐标系 i ，一个位置矢量 \mathbf{x} 在坐标系 i 下的坐标为 \mathbf{x}^i 。在这个定义下，从刚体坐标系到世界坐标系的坐标变换可以用仿射变换矩阵来表示：

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{E}_i^0 \mathbf{x}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i^0 & \mathbf{p}_i^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^i. \quad (17)$$

其中 \mathbf{x}^i 是一个四维向量，前三维为正常的空间坐标，第四维为 1， \mathbf{R}_i^0 表示的就是刚体 i 的旋转

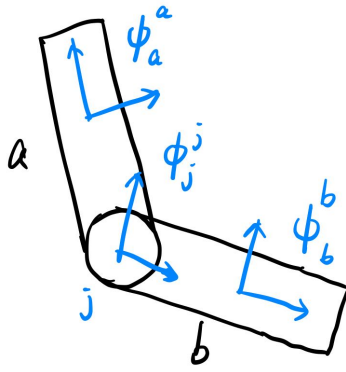


图 7: 关节速度

矩阵, \mathbf{p}_i^0 就是刚体 i 在世界坐标系下的质心位置. 类似的我们可以定义一系列从刚体 i 到刚体 $i-1$ 的坐标变换, 将刚体 i 到世界坐标系的坐标变换表示为 $\mathbf{x}^0 = \mathbf{E}_1^0 \mathbf{E}_2^1 \cdots \mathbf{E}_i^{i-1} \mathbf{x}^i$. 除此之外我们还需要定义速度变换, 但首先为了后续推导方便, 我们重新定义一下刚体的速度, 或者称为刚体的“twist”为 $\phi_j^i = ((\boldsymbol{\omega}_i^j)^T, (\mathbf{v}_i^j)^T)^T$. 在这个定义中, $\boldsymbol{\omega}_i^j$ 表示的是刚体 i 在坐标系 j 中的角速度, 注意这里坐标系 j 是一个非惯性系, 其本身也有旋转; \mathbf{v}_i^j 表示的是在坐标系 j 中位于坐标系 j 原点处与刚体 i 相对静止的点的速度, 这个定义并不直观, 所以这里我们额外解释一下. 我们采取类似欧拉视角的方法表示刚体速度, 可以假想刚体在旋转时, 整个空间有无数个点在跟着刚体一起旋转, 根据刚体的定轴转动原理, 这些点的速度会组成一个绕轴转动的速度场, 我们这里定义的速度, 就是在参考系 j 中观测到的原点处的场的速度. 有了这个定义之后, 我们可以推导出刚体速度的坐标变换公式:

$$\phi^0 = \mathbf{Ad}_i^0 \phi^i = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i^0 & 0 \\ [p_i^0] \mathbf{R}_i^0 & \mathbf{R}_i^0 \end{pmatrix} \phi^i. \quad (18)$$

与之前的位置变换类似, 这个变换可以在刚体之间递归地做下去, 并且给出 \mathbf{E} 之后, 我们就可以计算出 \mathbf{Ad} . 介绍到这里一个显而易见的问题是我们为什么要这样定义速度? 这个问题的原因其实非常直接, 我们想用节点的速度表示整个刚体系统的速度, 但是节点速度应该如何定义呢? 在这种非直观的刚体速度定义下, 我们可以给出一个直观的点速度的定义 (图7):

$$\phi_j^j = \phi_b^j - \phi_a^j. \quad (19)$$

由于这里两个刚体的速度都是在关节坐标系 j (固定在关节上与对应刚体一起旋转) 的原点处衡量的, 二者的差就应该是关节在这个点上额外增加的速度. 同时这样做会带来一个好处, 那就是这个速度只跟节点本身的自由度 \mathbf{q} 相关, 与它相连的两个刚体的位置、速度没有直接联系, 可以表示为:

$$\phi_j^j = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (20)$$

下面我们还是通过旋转关节和球关节这两个例子验证这一点.

对于旋转关节, 其自由度 $\mathbf{q} = (\theta)$. 我们可以固定刚体 1 不动, 分析刚体 2 在关节处的速度.

刚体 2 在关节处的线速度是 0，角速度就是关节旋转的角速度，于是自然有 $\mathbf{S} = (\mathbf{a}^T, 0)^T$ 。注意这里 \mathbf{a} 是在关节坐标系下的常矢量，而不是在世界坐标系下的运动矢量。

对于球关节，事情更为复杂一些。我们还是选择一个任意的三维矢量 \mathbf{q} 表示旋转的自由度，这时应该有 $\mathbf{S}_{6 \times 3} = [\mathbf{B}_{3 \times 3}^T, 0]^T$ ，因为刚体 2 在关节处的线速度依然是 0，但是存在角速度。为了得到 \mathbf{B} ，我们分析旋转矩阵 \mathbf{R} 的微分，有 $d\mathbf{R} = \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega} dt] = \mathbf{R}[\mathbf{B}d\mathbf{q}]$ ，注意这里 $\boldsymbol{\omega}$ 是在关节坐标系中的角速度，于是可以直接用 $\boldsymbol{\phi}$ 和 \mathbf{q} 的关系替换。注意到这个式子其实已经给出了 \mathbf{B} 应该要满足的关系，为了更直观地把 \mathbf{B} 表示出来，我们用 \mathbf{B}_i 表示 \mathbf{B} 的第 i 列， q_i 为 \mathbf{q} 的第 i 个分量，就有：

$$[\mathbf{B}_i] = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{dq_i}. \quad (21)$$

换句话说，我们需要用旋转矩阵 \mathbf{R} 和 \mathbf{q} 的关系计算出右手项，然后选择其中反对称矩阵的对应项组成一个向量变成 \mathbf{B} 的其中一列。尽管这个变换稍微有些复杂，但是归根结底 \mathbf{S} 依然可以用 \mathbf{q} 来完全表示。

有了关节速度的表示后，我们就可以数学上表示子节点上的刚体速度：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_b^b &= \mathbf{Ad}_j^b \boldsymbol{\phi}_b^j \\ &= \mathbf{Ad}_j^b (\boldsymbol{\phi}_a^j + \boldsymbol{\phi}_j^j) \\ &= \mathbf{Ad}_a^b \boldsymbol{\phi}_a^a + \mathbf{Ad}_j^b \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (22)$$

这个变换可以递归地做下去，于是我们就可以用从根节点出发的各个关节上的速度表示刚体速度：

$$\boldsymbol{\phi}_{b_3}^{b_3} = \mathbf{Ad}_{b_2}^{b_3} (\mathbf{Ad}_{b_1}^{b_2} (\mathbf{Ad}_{j_1}^{b_1} \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{q}}_1) + \mathbf{Ad}_{j_2}^{b_2} \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{q}}_2) + \mathbf{Ad}_{j_3}^{b_3} \mathbf{S}_3 \dot{\mathbf{q}}_3. \quad (23)$$

如果我们将所有刚体的速度写进一个长向量 $\boldsymbol{\phi} = ((\boldsymbol{\phi}_{b_1}^{b_1})^T, (\boldsymbol{\phi}_{b_2}^{b_2})^T, \dots)^T$ ，所有关节自由度也写进一个长向量 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \dots)^T$ ，那么二者的关系可以写为：

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}, \quad (24)$$

注意这里 \mathbf{J} 与最大坐标方法中的 \mathbf{J} 并不相同，只是用了相同的记号。在图6所示的例子中，我们可以给出 \mathbf{J} 的具体形式：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{b_1}^{b_1} \\ \boldsymbol{\phi}_{b_2}^{b_2} \\ \boldsymbol{\phi}_{b_3}^{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Ad}_{j_1}^{b_1} \mathbf{S}_{j_1} & 0 & 0 \\ \mathbf{Ad}_{b_1}^{b_2} \mathbf{Ad}_{j_1}^{b_1} \mathbf{S}_{j_1} & \mathbf{Ad}_{j_2}^{b_2} \mathbf{S}_{j_2} & 0 \\ \mathbf{Ad}_{b_2}^{b_3} \mathbf{Ad}_{b_1}^{b_2} \mathbf{Ad}_{j_1}^{b_1} \mathbf{S}_{j_1} & \mathbf{Ad}_{b_2}^{b_3} \mathbf{Ad}_{j_2}^{b_2} \mathbf{S}_{j_2} & \mathbf{Ad}_{j_3}^{b_3} \mathbf{S}_{j_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

观察这个矩阵我们可以发现一些规律：首先，矩阵的对角元素可以直接计算 $\mathbf{J}(b_i, j_i) = \mathbf{Ad}_{j_i}^{b_i} \mathbf{S}_{j_i}$ ；其次，对于刚体 b_i 对应的行的非对角元，我们可以发现 $\mathbf{J}(b_i, j_a) = \mathbf{Ad}_{b_p}^{b_i} \mathbf{J}(b_p, j_a)$ ，其中 b_p 是 b_i 的父节点刚体， j_a 是 j_i 的某个祖先关节。由于矩阵的这种递归性质，我们可以总结出下面的算法1。

Algorithm 1 组装 \mathbf{J}

```
1: while forward traversal do
2:    $b_i = j_i$ 's body
3:    $\mathbf{J}(b_i, j_i) = \mathbf{Ad}_{j_i}^{b_i} \mathbf{S}(q_i)$  ▷ Diagonal element
4:    $j_p = j_i$ 's parent joint
5:    $b_p = j_p$ 's body
6:   Form  $\mathbf{Ad}_{b_p}^{b_i}$ 
7:    $j_a = j_p$ 
8:   while  $j_a \neq \text{null}$  do
9:      $\mathbf{J}(b_i, j_a) = \mathbf{Ad}_{b_p}^{b_i} \mathbf{J}(b_p, j_a)$  ▷ Off-diagonal element
10:     $j_a = j_a$ 's parent joint
```

4.2 约化坐标动力学

有了节点速度到刚体速度的映射后，我们可以着手推导约化坐标下的动力学。因为刚体的速度定义在刚体坐标系下，所以运动方程与最大坐标方法下略有不同：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_0 & 0 \\ 0 & m\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \\ \dot{\mathbf{v}}_i^i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_i^i \\ \boldsymbol{\omega}_i^i \times m \mathbf{v}_i^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0^i \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{R}_0^i \mathbf{f} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

但是我们依然可以在考虑关节作用力之后把上面的方程总结为：

$$\mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{\text{joint}}. \quad (27)$$

首先，我们需要用方程24将 $\boldsymbol{\phi}$ 替换为 \mathbf{q} ；其次我们依然要处理 $\mathbf{f}_{\text{joint}}$ ，这时注意到我们将系统自由度约束到了关节上，根据虚功原理，约束力在满足约束的虚位移下不会增加能量，于是自然有 $\mathbf{J}^T \mathbf{f}_{\text{joint}} = 0$ 。考虑了这两点后，我们得到了如下的约化动力学方程：

$$\mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \mathbf{f}. \quad (28)$$

这个方程的左边 $\mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J}$ 可以看成是约化坐标下的约化质量，右边 $-\mathbf{J}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}$ 是由于坐标变换导致的类似科里奥利力，最后 $\mathbf{J}^T \mathbf{f}$ 是包含了科里奥利力的外力。由于这个方程里包含了 $\dot{\mathbf{J}}$ ，我们需要计算 \mathbf{J} 的导数。由于我们之前给出了计算 \mathbf{J} 的算法，计算导数只需要对这个算法进行一些微小的改动，如算法2所示。这里我们略去具体计算 $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{d}$ 、 $\dot{\mathbf{S}}$ 等的细节，因为之前已经给出了 $\mathbf{A}\mathbf{d}$ 、 \mathbf{S} 等的计算公式，只需要遵循求导法则使用当前各个刚体、各个关节的位置和速度就可以求出，更详细的推导请参考 Redmax's Note[1]。

4.3 软约束与环约束

与最大坐标方法对比，约化坐标方法其实不存在软约束，因为所有约束都通过坐标的约化强制保证。换句话说，对于最大坐标方法，约束可能因为某些数值误差而发生不同程度的违反，但是约化坐标方法能够保证约束在每时每刻一定被满足。这时如果我们想在关节上添加弹簧，实际上可以直接在方程 28 的右手边加上回复力的作用，因为我们的方程就是对关节自由度列的。

Algorithm 2 组装 \mathbf{J} 和 $\dot{\mathbf{J}}$

```
1: while forward traversal do
2:    $b_i = j_i$ 's body
3:    $\mathbf{J}(b_i, j_i) = \mathbf{Ad}_{j_i}^{b_i} \mathbf{S}(q_i)$ 
4:    $\dot{\mathbf{J}}(b_i, j_i) = \mathbf{Ad}_{j_i}^{b_i} \dot{\mathbf{S}}(q_i)$  ▷ For  $\dot{\mathbf{J}}$ 
5:    $j_p = j_i$ 's parent joint
6:    $b_p = j_p$ 's body
7:   Form  $\mathbf{Ad}_{b_p}^{b_i}$  and  $\dot{\mathbf{A}}d_{b_p}^{b_i}$  ▷ For  $\dot{\mathbf{J}}$ 
8:    $j_a = j_p$ 
9:   while  $j_a \neq \text{null}$  do
10:     $\mathbf{J}(b_i, j_a) = \mathbf{Ad}_{b_p}^{b_i} \mathbf{J}(b_p, j_a)$ 
11:     $\dot{\mathbf{J}}(b_i, j_a) = \dot{\mathbf{A}}d_{b_p}^{b_i} \mathbf{J}(b_p, j_a) + \mathbf{Ad}_{b_p}^{b_i} \dot{\mathbf{J}}(b_p, j_a)$  ▷ For  $\dot{\mathbf{J}}$ 
12:     $j_a = j_a$ 's parent joint
```

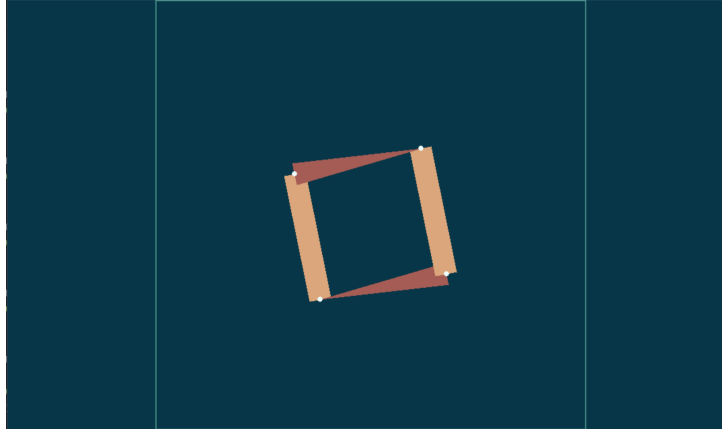


图 8: 环约束

约化坐标方法最大的问题，在于最开始的时候我们就假设刚体系统呈树状结构，而现实中很容易就会出现环约束的现象，如图8所示。这时如果依然想用约化坐标的方法求解，就必须暂时松开一个约束将环解开将其变成树结构。被松开的约束依然需要满足，于是可以使用类似最大坐标的方法，将这个关节转化为其他关节自由度的约束，通过拉格朗日乘法求解，这里就不多展开了。

5 比较与总结

我们介绍了两种最基本的模拟铰链刚体系统的方法，最大坐标方法和约化坐标方法。最大坐标方法的好处在于实现简单，能够自然处理环约束，同时可以方便地与其他基于约束的摩擦碰撞的算法耦合在一起。而约化坐标方法的好处在于可以一直保持约束，不像最大坐标方法一样可能出现关节抖动的情况，一般情况下会更为稳定；其次求解的问题规模也比最大坐标方法更小，严格等于系统的自由度，而最大坐标方法求解的问题规模是刚体自由度 + 约束自由度。约化坐标方法最大的问题在于难以处理环约束的情况，但这并不等价与完全不能处理。

除了这两种方法之外，还有其他模拟铰链刚体系统的算法比如 ABA、CRBA[2] 等，可以快速求解大规模的刚体模拟。同时为了便于解决优化问题，出现了很多可微刚体模拟的算法比如 DiffDart[3]。

参考文献

- [1] WANG Y, WEIDNER N J, BAXTER M A, et al. REDMAX: Efficient & flexible approach for articulated dynamics[J/OL]. ACM Trans. Graph., 2019, 38(4). <https://doi.org/10.1145/3306346.3322952>.
- [2] NEUMAN C, MURRAY J. Computational robot dynamics: Foundations and applications[J]. J. Field Robotics, 1985, 2: 425-452.
- [3] WERLING K, OMENS D, LEE J, et al. Fast and feature-complete differentiable physics for articulated rigid bodies with contact[Z]. [S.l.: s.n.], 2021.